ASIGNATURA DE MATEMATICAS PARA INGENIERIA 1.

2. Derivadas parciales.

2.1 Definición de derivadas parciales.

La derivada parcial de una función de varias variables es la derivada con respecto a cada una de esas variables manteniendo las otras como constantes, en pocas palabras significa derivar con respecto de una sola de las variables involucradas.

2.1.1. Derivada como razón de cambio

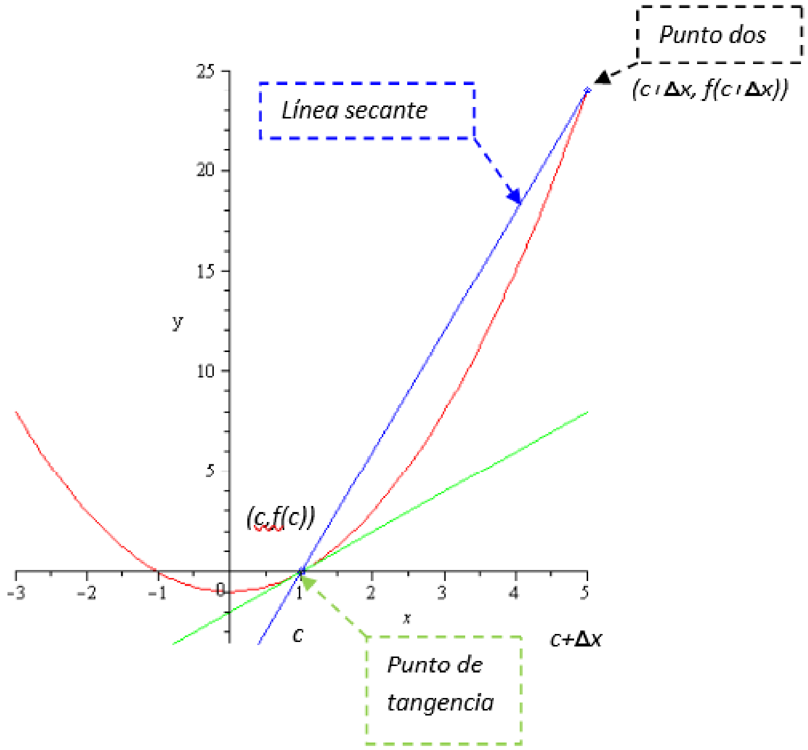
La razón de cambio es la proporción en la que una variable cambia con respecto a otra, de manera más explícita hablamos de la pendiente de una curva en una gráfica, es decir el cambio en el eje "y" entre el cambio del eje "x". A esto se le conoce también como la primera derivada.

La razón de cambio instantánea también conocida como la segunda derivada se refiere a la rapidez con que la pendiente de una curva cambia en determinado momento. Por lo tanto, hablamos de la razón de cambio de la pendiente en un momento especifico.

2.1.2. Derivada como pendiente

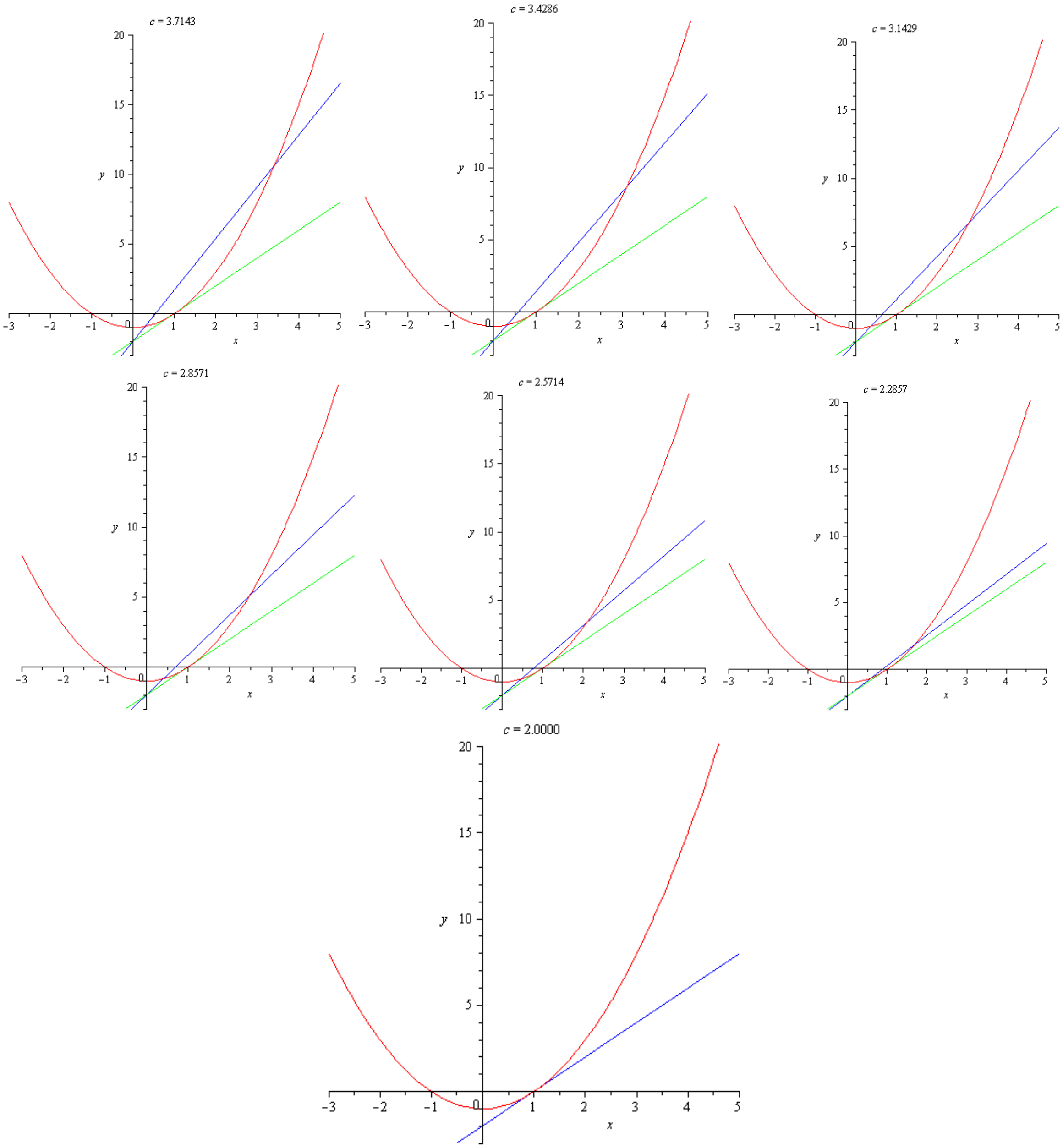
La derivada de una función matemática es la razón o velocidad de cambio de una función en un determinado punto. Es decir, qué tan rápido se está produciendo una variación. Desde una perspectiva geométrica, la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente al punto donde se ubica x.

La derivada es el resultado de un límite y representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.



2.1.3. Derivada recta tangente a la curva

La recta tangente a una curva es la que coincide con la curva en un punto y con la misma derivada, es decir, el mismo grado de variación.



Derivadas por medio de límite:

La derivada parcial con respecto a x en un punto (x, y) es:

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

La derivada parcial con respecto a y en un punto (x, y) es:

$$\frac{dz}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{\Delta x}$$

2.1.4. Reglas de derivadas parciales

2.1.4.1. Leyes de la diferenciación ordinaria

Las fórmulas de derivación que conocíamos de cálculo de una variable siguen siendo válidas con la diferencia que se solo se deriva respecto a una sola de las variables o la variable especificada.

2.1.4.1.1. Regla de la suma y resta

En esta regla derivamos independientemente "x" o "y" dependiendo el caso:

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

Ejemplos:

$$z = 6x^4 - 5x^3y^2 - 7x^2y^3 + 9xy^4 + 11y^5$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 24x^3 - 15x^2y^2 - 14xy^3 + 9y^4$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = -10x^3y - 21x^2y^2 + 36xy^3 + 55y^4$$

Los símbolos de las derivadas parciales que se pueden utilizar son los siguientes:

Derivada en "x"

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta f}{\delta x} = z_x = f_x$$

Derivada en "y"

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta f}{\delta y} = z_y = f_y$$

Actividad de trabajo 2.1.

$$1) z = 3x^3 + 8x^2y^2 - 5xy^3 + 3xy^4$$
$$2) z = 9x^2 - 11x^2y^2 + 7x^3y^3 - 21y^4$$
$$3) z = 10x^3 - 2x^2y^2 - 9xy^3 + 5y^5$$
$$4) z = 12x^2 + 24x^3y - 15y^2 + 4y^3$$
$$5) z = 12x^5 + 4x^4y^2 + 9x^3y^3 - 2x^2y^4 - 10y^5$$

2.1.4.1.2. Regla del producto

En este proceso se sigue utilizando la fórmula:

$$\frac{d}{dx}UV = UV' + VU'$$

Ejemplos:

Derivada en "x"

$$f(x,y)=x^3y^5\cos\left(x^2y^3\right)$$

$$\frac{\delta z}{\delta x}=x^3y^5\left(-sen\left(x^2y^3\right)*2xy^3\right)+\cos\left(x^2y^3\right)*3x^2y^5$$

$$\frac{\delta z}{\delta x}=-2x^4y^8sen\left(x^2y^3\right)+3x^2y^5\cos\left(x^2y^3\right)$$

Derivada en "y"

$$f(x,y)=x^3y^5\cos\left(x^2y^3\right)$$

$$\frac{\delta z}{\delta x}=x^3y^5\left(-sen\left(x^2y^3\right)*3x^2y^2\right)+\cos\left(x^2y^3\right)*5x^3y^4$$

$$\frac{\delta z}{\delta x}=-3x^5y^7sen\left(x^2y^3\right)+5x^3y^4\cos\left(x^2y^3\right)$$

Actividad de trabajo 2.2.

Obtener $\frac{\delta z}{\delta x}$ y $\frac{\delta z}{\delta y}$

1)$z=-3x^4y^6sen\left(4x^3y^4\right)$

2)$z=4x^3y^2e^{-5x^2y^3}$

3)$z=4sen\left(11x^2y^3\right)*e^{3x^4y^6}$

4)$z=5x^7y^8\tan\left(2x^4y^5\right)$

5)$z=\cot\left(7x^3y^2\right)*e^{-5x^7y^9}$

2.1.4.1.3. *Regla del cociente*

En este proceso se sigue utilizando la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\frac{U}{V}=\frac{VU'-UV'}{V^2}$$

Ejemplos:

Derivada en "x"

$$w=\frac{x^3-3z^2}{2x-z^4}$$

$$\frac{\delta w}{\delta x}=\frac{\left(2x-z^4\right)\left(3x^2\right)-\left(x^3-3z^2\right)\left(2\right)}{\left(2x-z^4\right)^2}=\frac{6x^3-3x^2z^4-2x^3+6z^2}{\left(2x-z^4\right)^2}$$

$$\frac{\delta w}{\delta x}=\frac{4x^3-3x^2z^4+6z^2}{\left(2x-z^4\right)^2}$$

Derivada en "z"

$$w=\frac{x^3-3z^2}{2x-z^4}$$

$$\frac{\delta w}{\delta z}=\frac{\left(2x-z^4\right)\left(-6z\right)-\left(x^3-3z^2\right)\left(-4z^3\right)}{\left(2x-z^4\right)^2}=\frac{-12xz+6z^5+4x^3z^3-12z^5}{\left(2x-z^4\right)^2}$$

$$\frac{\delta w}{\delta z}=\frac{-12xz-6z^5+4x^3z^3}{\left(2x-z^4\right)^2}$$

Actividad de trabajo 2.3.

Obtener $\frac{\delta w}{\delta x}$ y $\frac{\delta w}{\delta z}$

1) $w=\frac{x^2-z^2}{y^2+z^2}$

2) $w=\frac{3yx^2-4xz}{2xy-8xz^3}$

3) $w=\frac{2x^2z^3+5yz}{4x^2z-y^2}$

4) $w=\frac{-5xy^2-4y^3z}{4x^3y^2-10z^2}$

5) $w=\frac{3x^2+4y^3-7z^2}{6x^3-5y^2+4z^3}$

2.1.4.1.4. Regla de la raíz

En este proceso se sigue utilizando la fórmula:

$$\frac{d}{dx}U^{\frac{1}{n}} = \frac{U'}{n(U)^{1-\frac{1}{n}}}$$

Ejemplos:

$$w = \sqrt{3x^2 - 4y^2 + 5z^3}$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 4y^2 + 5z^3\right)^{-\frac{1}{2}} * (6x)$$

$$\frac{\delta^2 w}{\delta y \delta x} = -\frac{1}{2} * \frac{1}{2}\left(3x^2 - 4y^2 + 5z^3\right)^{-\frac{3}{2}} * (6x) * (-8y) = 12xy\left(3x^2 - 4y^2 + 5z^3\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\delta^3 w}{\delta z \delta y \delta x} = 12xy * -\frac{3}{2}\left(3x^2 - 4y^2 + 5z^3\right)^{-\frac{5}{2}} * \left(15z^2\right) = -270xyz^2\left(3x^2 - 4y^2 + 5z^3\right)^{-\frac{5}{2}}$$

Actividad de trabajo 2.4.

Obtener $\frac{\delta w}{\delta x}, \frac{\delta^2 w}{\delta y \delta x}, \frac{\delta^3 w}{\delta z \delta y \delta x}$

1) $w = \sqrt{8x^3 + 5y^3 - 4z^2}$

2) $w = \sqrt{11x^2 + 15y^3 - 6z^2}$

3) $w = \sqrt{-33x^3 + 10y^2 + 8z^4}$

4) $w = \sqrt[4]{12x^5 - 15y^4 - 7z^3}$

5) $w = \sqrt[3]{-20x^4 + 11y^3 - 17z^3}$

2.1.4.2. Derivadas de orden superior y mixtas

La sintaxis para este proceso es el siguiente:

Derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)$$

Derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\delta^3 z}{\delta x^3}=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\delta^3 z}{\delta y^3}=\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)$$

Derivadas parciales de segundo orden mixtas:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}=\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y\delta x}=\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$$

↑←← Derivar primero con respecto a →→↑

Teorema de igualdad de parciales mixtas:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 z}{\delta y\delta x}$$

Ejemplos:

$$w = 3x^3y - 5y^3z^2 + 8xz^3$$

$$\frac{\delta w}{\delta x} = 9x^2y + 8z^3$$

$$\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = 18xy$$

$$\frac{\delta^3 w}{\delta x^3} = 18y$$

$$\frac{\delta w}{\delta y} = 3x^3 - 15y^2z^2$$

$$\frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = -30yz^2$$

$$\frac{\delta^3 w}{\delta y^3} = -30z^2$$

$$\frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} = 9x^2 \quad = \quad \frac{\delta^2 w}{\delta y \delta x} = 9x^2$$

Actividad de trabajo 2.5.

Obtener

$\frac{\delta w}{\delta x}, \frac{\delta^2 w}{\delta x^2}, \frac{\delta^3 w}{\delta x^3},$ también demostrar el teorema de igualdad de parciales mixtas:

$1) w = 9x^3y^2z + 4xy^3 - 7yz^4$

$2) w = -7x^2y - 3xy^2z^2 + 11xz^3$

$3) w = 8xy^2z^3 - 10x^3y^3z^2 + 12yz^4$

$4) w = -4x^5y^2z^2 + 11x^4y^3 + 2x^3y^3z^4$

$5) w = 25x^3z - 12yz^3 + 4x^2y^3z^2$

2.1.4.3. *Diferenciación implícita*

En este proceso se sigue utilizando la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\delta}{\delta x}}{\frac{\delta y}{\delta x}}$$

Ejemplos:

$3z^2 = 2x - 3xy^2 z$

PRIMER PASO IGUALAR A CERO.

$3z^2 - 2x + 3xy^2 z = 0$

DESPUES DERIVAR

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{-\left(-2 + 3y^2 z\right)}{6z + 3xy^2} = \frac{2 - 3y^2 z}{6z + 3xy^2}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-\left(-2 + 3y^2 z\right)}{6xyz} = \frac{2 - 3y^2 z}{6xyz}$$

$5z^3 = 4x^2 y - 11y^2 z^3$

PRIMER PASO IGUALAR A CERO.

$5z^3 - 4x^2 y + 11y^2 z^3 = 0$

DESPUES DERIVAR

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{-\left(-8xy\right)}{15z^2 + 33y^2 z^2} = \frac{8xy}{15z^2 + 33y^2 z^2}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-\left(-8xy\right)}{-4x^2 + 22yz^3} = \frac{8xy}{-4x^2 + 22yz^3} = \frac{-4xy}{2x^2 - 11yz^3}$$

Actividad de trabajo 2.6.

Obtener

$$\frac{\delta z}{\delta x}, \frac{\delta y}{\delta x}$$

$1) z^2 = 3x^3y^2z + 2xy^3 - 5yz^4$

$2) 3z^3 = 4x^2y + 3xyz^2 - 8xz^3$

$3) 4z = 3xyz + 12x^3y^3z^2 - 7y^2z^4$

$4) 5z^4 = 11x^4y^2z^3 - 2x^3y^3 - 10xyz^4$

$5) -2z = 50x^2z^2 + 13y^2z^3 - 9x^3y^3z^4$

2.1.4.4. Regla de la Cadena

En este proceso se sigue utilizando la fórmula:

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Ejemplos:

$$z = 2x^2y + 7y^3; x = 3t^2; y = 5t^3 - t$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dx} = (4xy)(6t) + (2x^2 + 21y^2)(15t^2 - 1)$$

$$z = x^3y - y^4; x = 2t^2; y = 5t^2 - 6t$$

DONDE: t=1;x$(1) = 2; y(1) = -1$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dx} = (3x^2y)(4t) + (x^3 - 4y^3)(10t - 6)$$

$$\frac{dz}{dx} = \left(3(2)^2(-1)\right)\left(4(1)\right) + \left((2)^3 - 4(-1)^3\right)\left(10(1) - 6\right) = 0$$

Actividad de trabajo 2.7.

$z = x^3 y - y^4; x = 2t^2; y = 5t^2 - 6t$

DONDE: t=1;$x(1) = 2; y(1) = -1$

$1) z = -3x^3 y - 4xy^3 + 7y; x = -3t^2; y = 4t^2 + 5t$

$2) z = 5x^2 y^2 - 3xy^3; x = 4t^2 + 7t; y = -12t^2$

$3) z = 3x^4 y - 7y^2; x = -8t^2 + 5t; y = -3t^2 + 7t$

DONDE: t=2;$x(2) = -3; y(2) = 4$

$4) z = 10x^4 y^3 - 4x^3 y^2; x = 8t^3 - 2t; y = 3t^2 - 9t$

DONDE: t=3;$x(3) = -1; y(3) = 1$

$5) z = 5x^3 + 12y^2; x = 13t^2 - 5t; y = -4t^3 + 10t^2$

DONDE: t=5;$x(5) = 4; y(5) = 6$

2.2 Vector gradiente y derivada direccional.

2.2.1. Definir el vector gradiente, la derivada direccional y sus aplicaciones.

Gradiente.

En análisis matemático, particularmente en cálculo vectorial, el gradiente o también conocido como vector gradiente, denotado ∇f de un campo escalar, es un campo vectorial. El vector gradiente de f evaluado en un punto genérico x del dominio de f,f, ∇f ∇f indica la dirección en la cual el campo f varía más rápidamente y su módulo representa el ritmo de variación de f en la dirección de dicho vector gradiente.

El gradiente se representa con el operador diferencial nabla ∇ seguido de la función (atención a no confundir el gradiente con la divergencia; esta última se denota con un punto de producto escalar entre el operador nabla y el campo $\nabla \bullet \vec{F}$).

La generalización del concepto de gradiente para funciones vectoriales de varias variables es el concepto de matriz Jacobiana.

En matemáticas, el ‘gradiente’ es una generalización multivariable de la derivada. Mientras que una derivada se puede definir solo en funciones de una sola variable, para funciones de varias variables, el gradiente toma su lugar. El gradiente es una función de valor vectorial, a diferencia de una derivada, que es una función de valor escalar.

Al igual que la derivada, el gradiente representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función. Más precisamente, el gradiente apunta a los puntos de la gráfica a los cuales la gráfica tiene un mayor incremento. La magnitud del gradiente es la pendiente de la gráfica en esa dirección.

Los componentes del gradiente en coordenadas son los coeficientes de las variables presentes en la ecuación del espacio tangente al gráfico. Esta propiedad de caracterización del degradado permite que se defina independientemente de la elección del sistema de coordenadas, como un campo vectorial cuyos componentes en un sistema de coordenadas se transformarán cuando se pase de un sistema de coordenadas a otro.

$$\nabla(x,y,z)=\frac{\delta f}{\delta x}i+\frac{\delta f}{\delta y}j+\frac{\delta f}{\delta z}k$$

De forma geométrica, el gradiente es un vector normal (perpendicular) a la curva de nivel en el punto que se está estudiando, llámese (x,y), (x,y,z), (tiempo, temperatura), etc. Algunos ejemplos son:

- Considere una habitación en la cual la temperatura se define a través de un campo escalar, de tal manera que en cualquier punto (x,y,z), la temperatura es $\phi(x,y,z)$. Asumiremos que la temperatura no varía con respecto al tiempo. Siendo esto así, para cada punto de la habitación, el gradiente en ese punto nos dará la dirección en la cual la temperatura aumenta más rápido. La magnitud del gradiente nos dirá cuan rápido aumenta la temperatura en esa dirección.

- Considere una montaña en la cual su altura en el punto (x,y)se define como H(x,y). El gradiente de H en ese punto estará en la dirección para la que hay un mayor grado de inclinación. La magnitud del gradiente nos mostrará cuán empinada se encuentra la pendiente.
- Interpretación geométrica:
  - Si la función z = f(x,y) admite plano tangente en un punto p de su dominio, todas las derivadas direccionales por dicho punto se encuentran sobre el plano tangente y los vectores v están situados en el dominio.
  - El gradiente indica el sentido de crecimiento más rápido de una función en un punto dado. La derivada direccional tiene su valor máximo en el sentido del gradiente y coincide con su módulo.
- El gradiente de una magnitud física posee innumerables aplicaciones en física, especialmente en electromagnetismo y mecánica de fluidos. En particular, existen muchos campos vectoriales que puede escribirse como el gradiente de un potencial escalar. la conductividad térmica.

Derivada direccional.

En análisis matemático, la derivada direccional (o bien derivada según una dirección) de una función multivariable, en la dirección de un vector dado, representa la tasa de cambio de la función en la dirección de dicho vector. Este concepto generaliza las derivadas parciales, puesto que estas son derivadas direccionales según la dirección de los respectivos ejes coordenados.

Cada vector del espacio ordinario tiene un módulo y una dirección. Cuando se fija un vector dr =(dx,dy,dz) dx,dy,dz = dxi + dyj + dzk dando valores concretos a dx,dy,dz , se fija su módulo y su dirección. Cada valor de la diferencial de la función f en un punto (x,y,z), es el producto escalar de su gradiente en ese punto por un vector dr, es decir,

$$\nabla f \bullet dr = \frac{\delta f}{\delta x}dx + \frac{\delta f}{\delta y}dy + \frac{\delta f}{\delta z}dz = df$$

En cada punto (x,y,z) el gradiente ∇f es fijo, tiene un valor concreto; pero el vector dr puede ser cualquiera; puede tener cualquier módulo y cualquier dirección.

2.2.2. *Describir las características del vector gradiente y la derivada direccional en un punto dado en el plano.*

El gradiente es una función de valor vectorial, a diferencia de una derivada, que es una función de valor escalar. Al igual que la derivada, el gradiente representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función.

En análisis matemático, la derivada direccional (o bien derivada según una dirección) de una función multivariable, en la dirección de un vector dado, representa la tasa de cambio de la función en la dirección de dicho vector.

2.2.3. *Explicar el cálculo e interpretación de vector gradiente y derivada direccional:*

2.2.3.1. Obtener el vector gradiente:
-Derivar parcialmente con respecto a X y Y.
-Evaluar las derivadas parciales anteriores en el punto dado, para obtener las direcciones fxi+fyj.

Gradiente, Ejemplo:

$$f(x,y) = 5y - x^3y^2$$
$$\nabla f(x,y) = \frac{\delta}{\delta x}\left(5y - x^3y^2\right)i + \frac{\delta}{\delta y}\left(5y - x^3y^2\right)j$$
$$\nabla f(x,y) = -3x^2y^2i + \left(5 - 2x^3y\right)j$$

Gradiente, Ejemplo:

$$f(x,y)=5y-x^3y^2 \qquad (2,-3)$$

$$\nabla f(x,y)=\frac{\delta}{\delta x}\left(5y-x^3y^2\right)i+\frac{\delta}{\delta y}\left(5y-x^3y^2\right)j$$

$$\nabla f(x,y)=-3x^2y^2i+\left(5-2x^3y\right)j$$

$$\nabla f(2,-3)=\left(-3(2)^2(-3)^2\right)i+\left(5-2(2)^3(-3)\right)j=-108i+53j$$

2.2.3.2. Determinar el vector unitario:
-Dado el vector dirección V.
-Dado dos puntos P y Q.
-Dado el ángulo θ.

Derivada direccional, Ejemplo:

$$f(x,y)=2x^2y^3+6xy \qquad (1,1)$$

$$\nabla f(x,y)=\frac{\delta}{\delta x}\left(2x^2y^3+6xy\right)i+\frac{\delta}{\delta y}\left(2x^2y^3+6xy\right)j$$

$$\nabla f(x,y)=\left(4xy^3+6y\right)i+\left(6x^2y^2+6x\right)j$$

$$\nabla f(1,1)=\left(4(1)(1)^3+6(1)\right)i+\left(6(1)^2(1)^2+6(1)\right)j=10i+12j$$

$$u=\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}j$$

$$\nabla f(1,1)\bullet u=(10i+12j)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}j\right)=5\sqrt{3}+6$$

2.2.3.3. Realizar el producto punto (producto escalar) del vector gradiente y el vector unitario.

Considere el plano que es perpendicular al plano xy y que pasa por los puntos P(2, 1) y Q(3, 2). ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de este plano con la superficie $f(x,y)=4x^2+y^2$ en (2,1,17) en la dirección de Q?

Queremos determinar $D_u f(2,1)$ en la dirección dada por el vector $\overrightarrow{PQ}=i+j$ .Sin embargo, puesto $\overrightarrow{PQ}$ que no es un vector unitario, formamos

$$u = \frac{1}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

$$f(x,y) = 4x^2 + y^2 \quad (2,1)$$

$$\nabla f(x,y) = \frac{\delta}{\delta x}\left(4x^2 + y^2\right)i + \frac{\delta}{\delta y}\left(4x^2 + y^2\right)j$$

$$\nabla f(x,y) = (8x)i + (2y)j$$

$$\nabla f(2,1) = \left(8(2)\right)i + \left(2(1)\right)j = 16i + 2j$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

$$\nabla f(2,1) \bullet u = (16i + 2j)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right) = 9\sqrt{2}$$

Actividad de trabajo 2.8.

Determine el gradiente el punto dado:

1) $f(x,y) = x^2 - 4y^2 \quad (2,4)$

2) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \quad (-4,3,5)$

Determine la derivada direccional el punto dado:

1) $f(x,y) = 5x^3 y^6 \quad (-1,1)$

2) $f(x,y) = 4x + xy^2 - 5y \quad (3,-1)$

3) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y} \quad (2,-1), 6i + 8j$

4) $f(x,y,z) = x^2 y^2 (2z+1)^2 \quad (1,-1,1), \langle 0,3,3 \rangle$

5) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 - y^2}{z^2} \quad (2,4,-1), i - 2j + k$

En los problemas 7 y 8, considere el plano que pasa por los puntos P y Q y que es perpendicular al plano xy. Encuentre la pendiente de la tangente en el punto indicado a la curva de intersección de este plano y la gráfica de la función dada en la dirección de Q.

7) $f(x,y) = (x-y)^2$; P$(4,2)$, Q$(0,1)$; $(4,2,4)$

8) $f(x,y) = x^3 - 5xy + y^2$; P$(1,1)$, Q$(-1,6)$; $(1,1,-3)$

2.3 Extremos de funciones multivariables

2.3.1. Reconocer los conceptos de:
-Valores críticos.
-Máximos y mínimos de una función.

Números críticos.

Se denominan números críticos a aquel número real “c” en el cual la derivada de la función sea igual a cero.

F’(c)=0

Puntos críticos.

El punto correspondiente de la gráfica, es decir, las coordenadas en el espacio al sustituir el número crítico en la función se denomina punto crítico y se define de la siguiente manera:

(c, F(c))

Máximos.

Absoluto.- Se define como máximo absoluto a aquel punto en el espacio para el cual no existe **$F(X_2) \geq F(X_1)$** dentro del *dominio* de la función.

Relativo.- Los máximo relativo son aquellos formados por un número crítico “c” tal que **$F(c) \geq F(X)$** dentro de un intervalo **[a, b]** de la función.

Mínimos.

Absoluto.- Se define como mínimo absoluto a aquel punto en el espacio para el cual no existe **$F(X_2) \leq F(X_1)$** dentro del *dominio* de la función.

Relativo.- Los mínimo relativo son aquellos formados por un número crítico “c” tal que **$F(c) \leq F(X)$** dentro de un intervalo **[a, b]** de la función.

Extremos relativos

1. Un número f(a,b) es un máximo relativo de una función z=f(x,y) si f(x,y)≤f(a,b) para todo (x,y) en algún disco abierto que contenga a (a,b)
2. Un número f(a,b) es un mínimo relativo de una función z=f(x,y) si f(x,y)≥f(a,b) para todo (x,y) en

algún disco abierto que contenga a (a,b)

Teorema extremos relativos.
Si una función z=f(x,y) tiene un extremo relativo en el punto (a,b) y si la primeras derivadas parciales existen en este punto entonces:

$$F_x(a,b)=0 \text{ y } F_y(a,b)=0$$

Puntos críticos

Un punto crítico de una función z=f(x,y) es un punto (a,b) en el dominio de f para el cual $F_x(a,b)=0$ y $F_y(a,b)=0$, si una de sus derivadas parciales no existe en el punto.

Prueba de las segundas derivadas parciales.

Sea (a,b) un punto crítico de z=f(x,y) y suponga que f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} son continuas en un disco centrado en (a,b). Considere que:

$D(x,y)= f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y)-[f_{xy}(x,y)]^2$

1. Si $D(a,b)>0$ y $f_{xx}(x,y)>0$, entonces f(a,b) es un mínimo relativo.
2. Si $D(a,b)>0$ y $f_{xx}(x,y)<0$, entonces f(a,b) es un máximo relativo.
3. Si $D(a,b)<0$, entonces (a,b,f(a,b)) no es un extremo relativo
4. Si $D(a,b)=0$, entonces la prueba no es concluyente.

Teorema del valor extremo.

Una función f de dos variables x y y que es continua sobre un conjunto R cerrado y acotado tiene siempre un máximo absoluto y un mínimo absoluto sobre R.

2.3.2. Explicar el concepto de extremos con restricciones

En los problemas de optimización, el método de los multiplicadores de Lagrange, llamados así en honor a Joseph Louis Lagrange, es un procedimiento para encontrar los máximos y mínimos relativos (o locales) de funciones de múltiples variables sujetas a restricciones.1 Este método reduce el problema restringido con n variables a uno sin restricciones de n + k variables, donde k es igual al número de restricciones, y cuyas ecuaciones pueden ser resueltas más fácilmente. Estas nuevas variables escalares desconocidas, una para cada restricción, son llamadas multiplicadores de Lagrange. El método dice que los puntos donde la función tiene un extremo condicionado con k restricciones, están entre los puntos estacionarios de una nueva función sin restricciones construida como una combinación lineal de la función y las funciones implicadas en las restricciones, cuyos coeficientes son los multiplicadores.

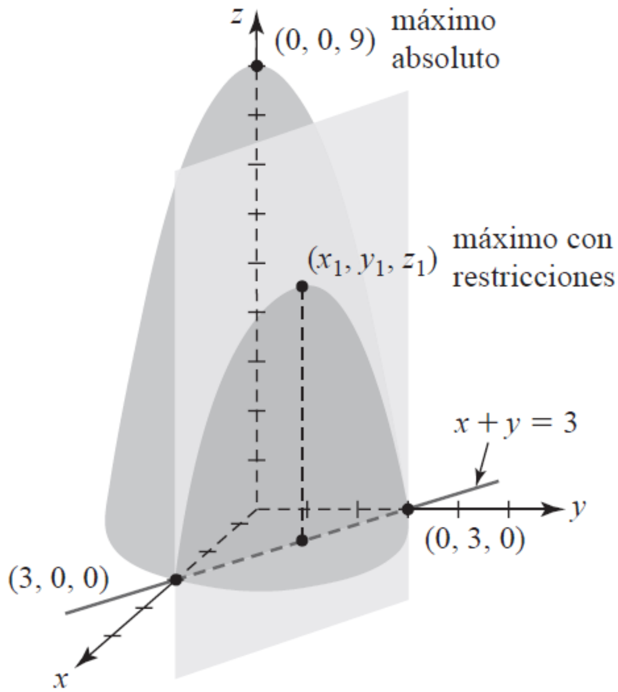
La demostración usa derivadas parciales y la regla de la cadena para funciones de varias variables. Se trata de extraer una función implícita de las restricciones, y encontrar las condiciones para que las derivadas parciales con respecto a las variables independientes de la función sean iguales a cero.

2.3.3. Explicar el método para calcular máximos y mínimos, y los multiplicadores de Lagrange.

Extremos con restricciones, ejemplo:

Determine geométricamente si la función $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ (paraboloide) tiene un extremo cuando las variables “x” y “y” están restringidas por x+y=3 (plano).

x	y	$f(x, y)$
0.5	2.5	2.5
1	2	4
1.25	1.75	4.375
1.5	1.5	4.5
1.75	1.25	4.375
2	1	4
2.5	0.5	2.5
3	0	0



De acuerdo con la figura la función tiene un máximo con restricciones para algunas x_1 y y_1 que satisfacen $0<x_1<3$, $0<y_1<3$ y $x_1+y_1=3$, la tabla de valores indica que el máximo es f(1.5,1.5)=4.5

Teorema de la Lagrange.

Suponga que la función z=f(x,y) tiene un extremo en el punto (x_0,y_0) sobre la gráfica de la ecuación de restricción g(x,y)=0. Si f y g tienen primeras derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene la gráfica de la ecuación de restricción $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, entonces existe un número real λ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

Método de multiplicadores de la Lagrange.

El número real λ para el cual $\nabla f = \lambda \nabla g$ recibe el nombre de multiplicador de Lagrange. Después de igualar componente, la ecuación $\nabla f = \lambda \nabla g$ es equivalente a:

$$f_x(x,y) = \lambda \nabla g_x(x_0,y_0), \;\; f_y(x,y) = \lambda \nabla g_y(x_0,y_0)$$

Si f tiene un extremo con restricciones en el punto (x_0,y_0), entonces acabamos de ver que hay un número λ tal que:

$$f_x(x_0,y_0) = \lambda g_x(x_0,y_0)$$
$$f_y(x_0,y_0) = \lambda g_y(x_0,y_0)$$
$$g(x_0,y_0) = 0$$

Estas ecuaciones sugieren el siguiente procedimiento, conocido como método de los multiplicadores de la Lagrange, para determinar los extremos con restricciones.

Guías para el método de los multiplicadores de la Lagrange.

i. Para encontrar los extremos de z=f(x,y) sujetos a la restricción g(x,y)=0, resuelva el sistema de ecuaciones:

$$f_x(x_0,y_0) = \lambda g_x(x_0,y_0)$$
$$f_y(x_0,y_0) = \lambda g_y(x_0,y_0)$$
$$g(x_0,y_0) = 0$$

ii. Entre las soluciones (x, y, λ) del sistema los puntos (x_i,y_i), donde f tiene un extremo. Cuando f tiene un máximo (mínimo), éste será el número más grande (o más pequeño) en la lista de los valores de la función f(x_i,y_i).

Continuando con el ejemplo anterior tenemos que:

$g(x,y)=x+y-3$

$f_x=-2x$

$f_y=-2y$

$g_x=1$

$g_y=1$

Enconces:

$-2x=\lambda$

$-2x=\lambda$

$x+y-3=0$

Al igualar la primera y la segunda ecuación obtenemos -2x=-2y o x=y. Al sustituir este resultado en la tercera ecuación, se encuentra que 2y-3=0 o y= $\frac{3}{2}$ y el máximo con restricciones es $f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$.

2.3.4. Identificar la aplicación de los extremos de una función como puntos de optimización.

Entre los ejemplos de aplicaciones de los extremos de una función como puntos de optimización podemos tener:

1) Costos mínimos.
2) Encontrar el máximo que se puede usar en un área, volumen.
3) Hallar la temperatura máxima en la curva intersección de dicha superficie.
4) Análisis de Funciones
5) Derivada de una Función
6) Recta Tangente y Recta Normal
7) Puntos de Inflexión y Curvatura de una Función
8) Entre otros.